Escola de Biomatemática da Bahia

Roberto André Kraenkel, *IFT*

Apontamentos de Cálculo Diferencial e Integral
Parte II

UFBA, 2022

Sumário

Invertendo Operações

Exemplos

- Vamos nos ocupar de *operações inversas*: aquelas que tem efeito inverso que uma outra operação.
- Tomemos por exemplo a operação: "elevar ao quadrado": ela pega um número e o eleva ao quadrado.
- Seja um número x. Chamemos o seu quadrado de y:
- $y = x^2$
- Qual é a operação inversa de "elevar ao quadrado"?
- $x = \sqrt{y} \quad = \quad y^{1/2}$
- É a operação que pega um número (y) e acha um outro (x) , tal que "o quadrado desse número (x) "é o número inicial (y).
- Aplicar uma operação e em seguida a sua inversa resulta em uma identidade:
- Elevar ao um número x ao quadrado : $y = x^2$ e depois tirar a raiz $\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = x$ resultou no próprio x.

Invertendo Operações II

Exemplos II

- Assim, temos que:
- A inversa de e^x é $\ln(x)$, pois $\ln(e^x) = x$.
- A inversa de "somar 5"é "subtrair 5, pois $x + 5 - 5 = x$.
- A inversa de "multiplicar por 2"é "dividir por 2", pois $(2x)/2 = x$.
- A inversa de $\sin(x)$ é o $\arcsin(x)$: o arco cujo seno é x.

E agora nos perguntamos qual é a inversa da operação de derivação.

A antiderivada

Diferenciação e sua Inversa

- Lembremos da derivada.
- Temos uma **função**, $f(x)$.
- Podemos calcular a sua derivada $\frac{df}{dx}$.
- A sua derivada é uma nova função.
- Veja a analogia:
- Elevar um <u>número</u> ao quadrado, nos fornece um novo <u>número</u>.
- A operação anterior (chamada de potenciação) leva <u>números</u> em <u>números</u>.
- E a sua inversa ("tirar a raiz"), também.
- A operação "tomar a derivada de $f(x)$"(chamada de diferenciação ou derivação) leva uma **função** em outra **função**.
- Assim, a operação inversa da diferenciação tem que também levar uma **função** em outra **função**.
- Provisoriamente, chamemos esta operação de **antiderivada**.

A antiderivada II

Um primeiro cálculo

- A antiderivada deve portanto "desfazer"a operação de derivao.
- Seja por exemplo

$$f(x) = x^2$$

- Vimos que neste caso

$$\frac{df}{dx} = 2x$$

- Assim, a antiderivada da função

$$g(x) = 2x$$

- é

$$x^2$$

pois x^2 é a função cuja derivada é $2x$.

A antiderivada II

Notação e nomenclatura

- Você notou que ainda não introduzimos uma notação para a antiderivada
- Aqui vai:

  A antiderivada da função $f(x)$ é denotada por $\int^x f(x)dx$

  Assim, por exemplo:

  $$\int^x (2x)dx = x^2$$

- Vamos agora dar um novo nome para a antiderivada: **integral indefinida**.
- Lê-se a expressão acima como : *a integral indefinida de* $2x$ *é* x^2.
  - O adjetivo indefinida é muitas vezes omitido. Adiante veremos que existe um outro objeto matemático chamado de *integral definida*.
  - Muitas vezes chama-se a integral indefinida de uma função de **primitiva**. Não usaremos esta nomenclatura extensamente aqui, mas é bom conhece-la. Assim, a primitiva de $2x$ é x^2.

Integral Indefinida

Somando constantes

- Voltemos ao exemplo acima
- $$\int^x (2x)dx = x^2 \quad ,$$

  pois $\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$
- Mas veja que

  $$\frac{d(x^2+K)}{dx} = 2x \quad ,$$

  onde K é qualquer constante.
- Assim, podemos escrever que

  $$\int^x (2x)dx = x^2 + K$$

Conclusão: Sempre podemos somar uma constante arbitrára ao resultado de uma integral indefinida.

Integral Indefinida II

Alguns cálculos

- Vamos então obter algumas integrais indefinidas a partir de sua definição.
- A integral indefinida de uma função $f(x)$ é a uma outra função, g(x), cuja derivada é $f(x)$.
- $$\int^x x dx = \frac{x^2}{2} \quad \text{pois} \quad \frac{d(x^2/2)}{dx} = x$$
- $$\int^x x^2 dx = \frac{x^3}{3} \quad \text{pois} \quad \frac{d(x^3/3)}{dx} = x^2$$
- $$\int^x x^n dx = \frac{x^n}{n} \quad \text{pois} \quad \frac{d(x^n/n)}{dx} = x^n$$
- $$\int^x 5x dx = \frac{5x^2}{2} \quad \text{pois} \quad \frac{d(5x^2/2)}{dx} = 5x$$

onde ainda podemos somar uma constante a cada resultado.

Integral Indefinida III

Alguns cálculos, *bis*

- $$\int^x e^x dx = e^x \quad \text{pois} \quad \frac{de^x}{dx} = e^x$$
- $$\int^x e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} \quad \text{pois} \quad \frac{d\frac{e^{2x}}{2}}{dx} = e^{2x}$$
- $$\int^x e^{Kx} dx = \frac{e^{Kx}}{K} \quad \text{pois} \quad \frac{d\frac{e^{Kx}}{K}}{dx} = e^{Kx}$$
- $$\int^x \frac{1}{x} dx = \ln(x) \quad \text{pois} \quad \frac{d\ln(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

aonde ainda podemos somar uma constante a cada resultado.

Integral Indefinida IV

Alguns cálculos, *ter*

- $$\int^x \ln(x)dx = x(\ln(x) - 1) \quad \text{pois} \quad \frac{d[x(\ln(x) - 1)]}{dx} = \ln(x)$$
- $$\int^x \sin(x)dx = -\cos(x) \quad \text{pois} \quad \frac{d(-\cos(x))}{dx} = \sin(x)$$

$$\int^x \sin(Kx)dx = \frac{-\cos(x)}{K} \quad \text{pois} \quad \frac{d(-\cos(x)/K)}{dx} = \sin(Kx)$$

$$\int^x \cos(x)dx = \sin(x) \quad \text{pois} \quad \frac{d(\sin(x))}{dx} = \cos(x)$$

onde ainda podemos somar uma constante a cada resultado.

Integral Indefinida V

Alguns cálculos, *quater*

Podemos continuar a nossa brincadeira invertendo tabelas de derivação:

função	Derivada
xe^x	$(x+1)e^x$
$\sin(x^2)$	$2x.\cos(x^2)$
$x.\sin(2x)$	$\sin(2x)+4x\cos(2x)$

função	Integral
$(x+1)e^x$	xe^x
$2x.\cos(x^2)$	$\sin(x^2)$
$\sin(2x)+4x\cos(2x)$	$x.\sin(2x)$

onde ainda podemos somar uma constante a cada resultado da integral acima.

Integral Indefinida VI

Algumas regras

- O processo de integração não é tão simples quanto do de derivação.
- Muitas vezes recorremos a tabelas de integrais,
- Ou a softwares que tem capacidade de manipulação algébrica
- Por exemplo: Mathematica, Wolfram Alpha.
- Mas devemos ter em mente algumas regras simples:

Integral Indefinida VII

Algumas regras, *bis*

- $$\int^x dx = x$$

- Da própria definição de integral indefinida:

$$\int^x \frac{df}{dx} dx = f(x)$$

- $$\int^x Af(x)dx = A\int^x f(x)dx$$

  onde Aé uma constante (uma função que não depende de x).

- $$\int^x [f(x) + g(x)]dx = \int^x f(x)dx + \int^x g(x)dx$$

- Mas note que a integral do produto **não** é o produto das integrais.

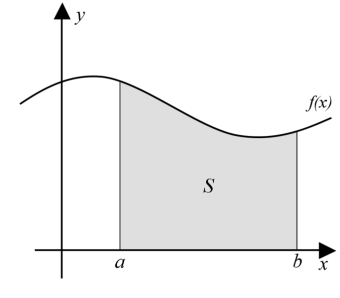
Áreas

Áreas

- Você se lembra que no fim de nossa discussão sobre derivadas demos uma interpretação para a derivada como sendo a inclinação da curva tangente ao gráfico da função que estamos derivando.
- A integral também pode ser interpretada geometricamente.
- Está relacionada à area debaixo de uma curva.
- Vejamos.

Áreas II

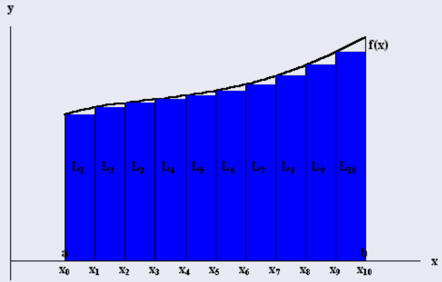
Área debaixo de uma curva



- Aí está o gráfico da função $f(x)$ e a área debaixo da curva entre os pontos a e b.
- Como podemos calculá-la?

Áreas III

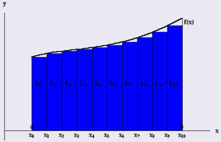
Área debaixo de uma curva, *bis*



- Uma forma de calcular a área é somar a área de todos os retângulos da figura acima.
- Mas note que tem sempre um pequeno erro nisto.
- Mas quanto mais retângulos tivermos, cada vez menores, mais próximos estaremos da área real.

Áreas IV

Área debaixo de uma curva, *ter*



- Aárea total debaixo do gráficoe é portanto a soma de um número infinito de retângulos cujas bases são infinitesimais.
- Chamamos de dx o comprimento de cada base.
- A área de cada retângulo será $f(x)dx$.
- E a área total será a soma de todos estas áreas, e a denotamos por:

$$\int_b^a f(x)dx$$

Áreas V

Integrais

- A notação usada para representar área debaixo de uma curva é sugestiva;
- Mas o que a esta área tem a ver com a integral indefinida (que era, como vimos, uma antiderivada).
- Há um teorema que diz (o teorema fundamental do cálculo) :

$$\int_b^a f(x)dx = \int^a f(x)dx - \int^b f(x)dx$$

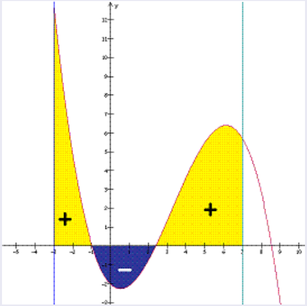
aonde as integrais do lado direito são as integrais indefinidas de $f(x)$ calculadas nos pontos a e b.

- A integral do lado esquerdo é chamada de "integral definida de $f(x)$ entre a e b".

Áreas VI

Integrais, *bis*

- Só que temos que ter cuidado:
- As áreas das quais falamos tem sinal:



- A parte negativa conta com sinal negativo.

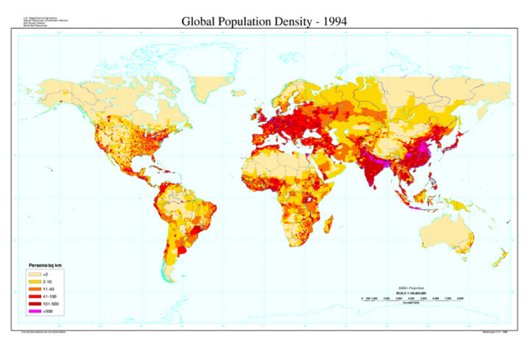
Densidades

Densidades

- Voltemos agora a alguns conceitos que podemos usar em biologia de populações.
- Muitas das medidas que podemos fazer são de número de indivíduos por área.
- Ou seja a densidade de indivíduos.
- Se estudamos uma certa população, esta densidade pode variar de ponto para ponto.
- Há lugares mais fortemente populados e outros menos.
- E se quisermos saber a população total numa certa região?

Densidades II

Densidade e População Total



Densidades III

Densidade e População Total, *bis*

- Na página anterior mostra-se um mapa da densidade de pessoas no mundo.
- Para saber a população total do mundo você poderia:
  - Dividir o mundo em minúsculas regiões;
  - calcular a população de cada uma destas regiões multiplicando a densidade pela área;
  - somar as populações de todos as regiões
  - Em suma você quer calcular a integral definida da densidade....
  - Ou seja:

$$\text{número total de Indivduos entre os pontos } a \text{ e } b = \int_b^a \rho(x)dx$$

onde $\rho(x)$ é a densidade da população no ponto x.

Resumo Final

O que devo lembrar

- A integrção indefinida é a operação inversa da diferenciação.
- Ou seja: a integral indefinida de $f(x)$ é uma outra função $g(x)$ tal que a derivada de desta é a primeira função, $f(x)$.
- Podemos relacionar a integral indefinida com o cálculo de áreas (com sinal) debaixo da curva do gráfico de $f(x)$..
- Usamos isso no dia-a-dia para obter, por exemplo, populações totais a partir de densidades populacionais.

Obrigado pela ateção