Escola de Biomatemática da Bahia

Roberto André Kraenkel, *IFT*

Apontamentos de Cálculo Diferencial e Integral
Parte III

UFBA, 2022

Sumário

Leis

Taxas de variação, de novo

- Voltemos a falar de taxas de variação. Taxas de variação no tempo.
- Muitas das variáveis que medimos – por exemplo, número de indivíduos de uma espécie numa dada área – podem variar no tempo.
- Podemos observar padrões de variação tanto em laboratório, quanto no campo.
- Mas, além da pura observação, gostaríamos de saber o que gera estas variações no tempo.
- Exemplo: por que cresce uma população?
- Gostaríamos de sair de um processo biológico e chegar em um padrão de variação dinâmica. [1]

[1] Usualmente o adjetivo dinâmico é associado a variações no tempo. Assim, aos falarmos em dinâmica da populações, estamos nos referindo no mais das vezes a como esta população muda com o passar do tempo.

Leis II

De onde vem a dinâmica

- Se falamos em *padrão de variação dinâmica*, falamos em taxa de variação $\Rightarrow$ falamos em *derivadas*.
- Queremos, por exemplo, saber o que faz a derivada no tempo (ou seja a taxa de variação temporal) da quantidade total de indivíduos num dado sítio ser diferente de zero.
- Para tal, precisamos estabelecer uma lei de crescimento (ou decrescimento).
- Vamos olhar o caso mais simples; para muitas populações o crescimento acontece pelo simples fato da população se reproduzir. E a tendência ao decrescimento vem do fato de indivíduos morrerem.
- Se, numa dada área, não houver migraçõees, reprodução e mortalidade são o que fazem a população variar.
- Assim, a taxa de variação da população deve depender da reprodução e da mortalidade.

Leis III

Uma lei simples, ainda sem matemática

- Vamos considerar um caso muito simples, em que uma população tem recursos abundantes para poder se reproduzir.
- Reproduçào $\Rightarrow$ quanto mais indivíduos tivermos, mais nascem.
- Mortalidade $\Rightarrow$ o número de indivíduos que morrem deve ser proporcional ao número de indivíduos da população.
- Se são reproduçào e mortalidade que determinam a variação na quantidade de indivíduos de uma população, então

  a derivada temporal do número de indivíduos da população deve ser determinada pela população que existe neste momento.
- Vamos colocar isso em termos matemticos.

Leis IV

Uma lei simples, com matemática

- O que foi dito anteriormente se traduz por:

$$\frac{dN}{dt} \sim \text{[nascimentos - mortes]} \; \sim N(t)$$

- ou

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)$$

- aonde a constante r mede o balanço entre nascimentos e mortes.
- Vamos agora refletir sobre a construção acima.

Equação diferencial

Uma equação

- $$\frac{dN}{dt} = rN(t)$$
- A expressão acima diz que a variação da população é proporcional a ela mesma.
- Relaciona a derivada da função $N(t)$ com a própria função.
- Ou seja, é uma **equação** para determinar $N(t)$.
- É uma equação diferencial, pois envolve a derivada da função.
- Sua solução é uma função, não um número.
- É uma função tal que a sua derivada seja ela mesma multiplicada por um fator r.

Equação Diferencial II

Resolvendo a nossa equação

- $$\frac{dN}{dt} = rN(t)$$
- Sua solução é uma função tal que a sua derivada seja ela mesma multiplicada por um fator r
- Oras, já vimos uma função assim.
- Lembre-se que
$$f(t) = e^{rt} \Rightarrow \frac{df}{dt} = re^{rt} = rf(t)$$
- Ou seja, sabemos que
$$N(t) = e^{rt}$$
satisfaz a equação diferencial
$$\frac{dN}{dt} = rN(t)$$

Equação diferencial III

Soluções demais

- $$\frac{dN}{dt} = rN(t)$$
- Ótimo, achamos um função que resolve a equação acima; $N(t) = e^{rt}$.
- Mas tem um porém. Podemos achar outra solução. Simples. Por exemplo:

$$N(t) = 2e^{rt} \quad \text{ou ainda} \quad N(t) = 10e^{rt} \quad \text{ou ainda} \quad N(t) = \frac{3}{2}e^{rt} \quad \text{ou ainda ...}$$

- Ou seja, todas as funções
$$N(t) = Ke^{rt}$$
com qualquer constante K, são soluções da equação no topo da página.
- E agora?

Equação diferencial IV

Constante de integração

- $$\frac{dN}{dt} = rN(t) \quad \Rightarrow \quad N(t) = Ke^{rt}, \quad K \text{ uma constante arbitrária.}$$
- K recebe o nome de constante de integração
- Como determinamos K?
- Impomos uma condição suplementar. Vejamos como.
- Suponha que saibamos a população em um dado momento. Chamemos esta população de N_0 e o tempo correspondente de $t = 0$. Então:
- $$N(0) = N_0$$
- A condição acima é chamada de **condição inicial**.
- O que implica em

$$N(0) = Ke^{r.0} = K = N_0 \quad \text{ou seja,} \quad K = N_0 \quad \Rightarrow N(t) = N_0 e^{rt}$$

Equação diferencial V

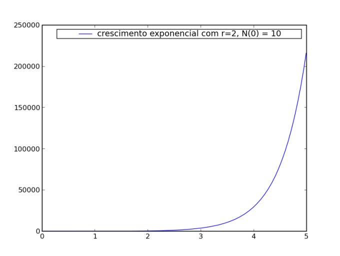
Recapitulando...

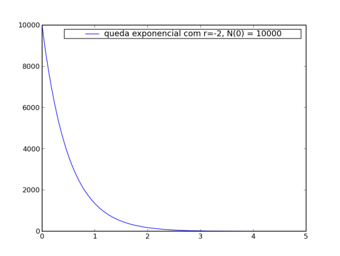
- Vejamos então o que fizemos até aqui:
- Relacionamos a taxa de variação do número de indivíduos da população com o número des indivíduos presentes na população.
- Ou seja, o padrão de variação dinâmico é visto como gerado pela reproduçào e mortalidade da população.
- Isso nos levou a uma equação diferencial.
- Vimos que ela tem inúmeras soluções: funções que descrevem o número de indivíduos da população.
- E para determinar uma solução única, precisamos de um conhecimento adicional: a população num dado momento do tempo.
- A equação diferencial que estudammos expressa uma lei de crescimento.
- Junto com a condição inicial, nos dá uma previsão para a dinâmica da população.
- Estamos aqui num mundo estritamente determinístico.

Equação diferencial VI

Gráfico

- E afinal, qual foi a previsão obtida a partir da equação diferencial?
- Duas possibilidades:
- Se $r > 0$ (taxa de nascimentos maior que a taxa de mortalidade): temos crescimento exponencial.
- Se $r < 0$ (taxa de nascimentos menor que a taxa de mortalidade):temos queda exponencial
- Alguns gráficos ajudam a entender isso melhor.





Mais equações

Modelagem

- Você – com toda razão – pode argumentar que este padrão não é o único observado.
- É mesmo raro observa-lo.
- Não culpe a matemática, porém.
- O que foi colocado na equação é que o crescimento se dá pela reproduçào e esta independe se há muitos ou poucos indivíduos.
- Mas sabemos que o crescimento pode ser menor quando a população é grande, por exemplo.
  - Pode faltar alimento; pode faltar espaço,...
- Isso por que existem mecanismos de regulação de uma população.
- Não colocamos isso na equação, não podemos esperar que ela nos descreva isso.
- Boa parte do curso de verão será traduzir mecanismos biológicos em equações.
- ão vamos nos adiantar nisso agora.
- Mas vamos ver mais algumas coisas sobre equações diferenciais.

Mais equações

Mais sobre equações

- Vimos até aqui somente uma equação diferencial:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)$$

- Mas há muitas com as quais podemos nos divertir. Vamos brincar com algumas.
- Por exemplo:

$$\frac{df}{dt} = f(t) - f^2(t)$$

- E agora? Como resolvemos isso?
- Ou então essa aqui:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -f$$

- Bem-vindo ao mundo das equações diferenciais.
- Primeira lição: não existe um método geral para resolver equações diferenciais.
- Algumas delas tem soluções que sequer podem ser escritas como funçõees elementares (polinômios, exponenciais, trigonométricas).

Brincando com equações

$\frac{df}{dt} = f(t) - f^2(t)$

- A equação acima é uma que pode ser resolvida.
- Aqui, a sua solução e seu gráfico (K uma constante arbitrária):

$$f(t) = \frac{1}{1 + Ke^{-t}}$$

- Mas de onde foi tirada esta solução?

Brincando com equaes II

$\frac{df}{dt} = f(t) - f^2(t) \Rightarrow f(t) = \frac{1}{1+Ke^{-t}}$

- Primeiro verifique que temos uma solução:

$$\frac{df}{dt} = \frac{Ke^{-t}}{(1+Ke^{-t})^2}$$

$$f - f^2 = \frac{1}{1+Ke^{-t}} - \frac{1}{(1+Ke^{-t})^2} = \frac{Ke^{-t}}{(1+Ke^{-t})^2}$$

- note que de novo temos uma constante arbitrária.
- Esta solução pode ser obtida pelo processo na página seguinte.
- Não se assuste.

Brincando com equações III

$\frac{df}{dt} = f(t) - f^2(t) \Rightarrow f(t) = \frac{1}{1+Ke^{-t}}$

$$\frac{df}{dt} = f(t) - f^2(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{f - f^2} = dt$$

$$\int^f \frac{df}{f - f^2} = \int^t dt + C$$

$$\ln(f) - \ln(1 - f) = t + C \quad \Rightarrow \ln(f/1 - f) = t + C \quad \Rightarrow$$

$$\frac{f}{1 - f} = e^{t+C} \quad \Rightarrow f = (1 - f)e^{t+C} \quad \Rightarrow$$

$$f(1 + e^{t+C}) = e^{t+C}$$

$$f = \frac{1}{1 + Ke^{-t}} \quad \text{onde } K = e^{-C}$$

Generalidades

Constantes de Integração

- Você viu que equações diferenciais podem ser complicadas de resolver.
- Isso, quando consegue-se resolvê-las.
- Mas é bom saber algumas coisas gerais sobre elas
  - Você viu que novamente tivemos uma constante de integração aparecendo.
  - Uma equação diferencial com derivadas de primeira ordem sempre terá uma constante de integraçào
  - Se a equação tiver derivadas de segunda ordem (como a $\frac{d^2f}{dt^2} = -f$) teremos duas constantes de integraçào. E assim por diante.
  - A propósito, esta última equação tem solução simples:

$$f(t) = A\sin(t) + B\cos(t) \quad \text{com A e B constantes de integração.}$$

Generalidades II

Linearidade e Não-linearidade

Lembremos de duas equações diferenciais:

$$\frac{df}{dt} = f$$

$$\frac{df}{dt} = f - f^2$$

Há uma grande diferença entre elas.

- Na equação da esquerda podemos multiplicar uma solução por uma constante e ainda teremos uma solução
- Podemos somar duas soluções e ainda teremos uma solução.
- Na equação da direita **NÃO** podemos multiplicar uma solução por uma constante e ainda ter uma solução
- **NÃO** podemos somar duas soluções e ainda ter uma solução.
- A equação da esquerda é dita **linear** e a da direita, **não-linear**.

Resolvendo de outra forma

- Vamos voltar à nossa equação diferencial mais simples: $\frac{dN}{dt} = rN$
- Mas vamos tratar de um caso bem concreto. Por exemplo: $r = 2$ e $N(0) = 20$.
- E vamos lembrar da definição de derivada:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} \quad \text{para} \quad \Delta t \text{ muito pequeno}$$

- A rigor, para Δt infinetesimal.
- Mas vamos dizer que Δt tenha um valor definido. Digamos $\Delta t = 0.01$.
- Neste caso podemos escrever:

$$\frac{N(t+0.01) - N(t)}{0.01} = 2N(t)$$

Métodos Numéricos

Resolvendo de outra forma

- $$\frac{N(t+0.01)-N(t)}{0.01} = 2N(t)$$
- Mas então, se sabemos que $N(0)$ é 20, podemos calcular $N(0.01)$
$$N(0.01) - 20 = 0.01 \cdot 2 \cdot 20 \Rightarrow N(0.01) = 20 + 0.4 = 20.4$$
- Mas agora podemos calcular $N(0.02)$, pois
$$\frac{N(0.02)-N(0.01)}{0.01} = 2N(0.01) \Rightarrow N(0.02) - 20.4 = 2 \cdot 0.01 \cdot 20.4$$
$$\Rightarrow N(0.02) = 20.808$$
- E assim por diante:
$$N(0.03) - N(0.02) = 2 \cdot 0.01 \cdot N(0.02) \Rightarrow N(0.03) = 21.22416$$

E mais....

Com um pouco de paciência e uma calculadora podemos fazer uma tabela:

Tempo (s)	N(t)
0	20
0.01	20,4
0.02	20,808
0.03	21,22416
0.04	21,6486432
0.05	22,0816161
0.06	22,5232483
0.07	22,9737133
0.08	23,4331876
0.09	23,9018514
0.1	24,3798884

- Oras, estamos resolvendo a equação diferencial.
- Somente usamos a definição de derivada e
- **uma aproximação**. A de que $\Delta t = 0.01$.
- É claro que se usarmos um Δt menor, melhor será a aproximação.
- Chamamos este Δt de passo da integração.

Métodos Numéricos III

- O que fizemos na página anterior é um exercio de integração numérica.
- Poderia ter sido feito para uma equação mais complicada.
- Sempre a mesma ideia: aproximar a derivada.
- Veja que é algo maquinal de se fazer.
- É algo que pode ser feito por um programa de computador.
- O bom é que já existem estes programas.
- E há, ademais, uma série de métodos mais rápidos que o método acima (chamado de método de Euler).
- Na grande maioria dos problemas de biologia de populações, a integração numéricaé muito útil.

Resumo Final

O que devo lembrar

- Equações diferenciais são uma forma de estabelecer relações entre padrões de variação temporal e os processos que lhes dão origem.
- Ligam derivadas de uma função com os valores desta função.
- Suas soluções são funções.
- Equações diferenciais nos dão um meio de formular leis deterministicas.
- Não há um método geral para resolver todo tipo de equação diferencial.
- Há casos simples, mas a maioria é um tanto complicada.
- Podemos também usar métodos numéricos para achar aproximações da solução de uma equação diferencial.
- Neste último caso, isso pode ser feito com programas de computador.

Obrigado pela atenção