Escola de Biomatemática da Bahia

Roberto André Kraenkel, *IFT*

Apontamentos de Cálculo Diferencial e Integral
Parte I

UFBA, 2022

Sumário

Differential calculus is more interesting because it describes how things change.

G. Evelyn Hutchinson
citado por T.E. Lovejoy

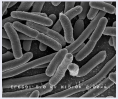
Números

O que medimos são números.

- Boa parte das medidas que realizamos em ecologia resultam em números.
- Este números representam um certo sistema num dado momento do tempo e numa certa região do espaço.
- E esses números podem mudar: tanto no tempo quanto no espaço.
- Para quantificar estas variaçõees usamos a ideia de taxa de variação.
- A tradução matemática da ideia de taxa de variação é o que dá origem ao *cálculo diferencial*.

Funções

Um filme



Descrevendo o filme com números

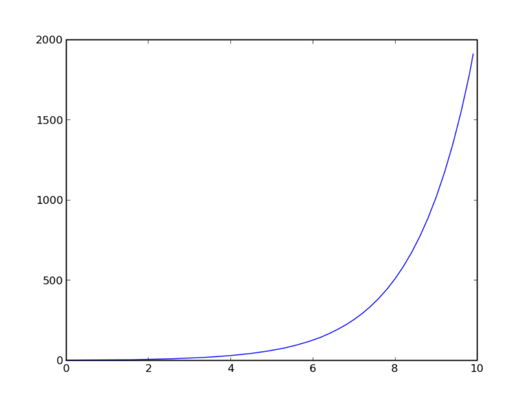
Tempo (s)	Bactérias
0	2
1	4
2	8
3	16
4	32
5	64
14	16384
30	1073741824
60	1152921504606846976

$\Rightarrow$ O número de bactérias função do tempo, $N(t)$.

Funções II

Gráficos

Depois de um certo tempo começamos a nos perder com estes números. Mais interessante que a tabela é fazer um gráfico:



Taxas

Quão rápido?

Podemos agora nos colocar a questão:

Quão rápido cresce o número de bactérias?
ou
Qual é a velocidade de crescimento das bactérias?

Definindo a taxa de variação

Para que a questão acima tenha sentido, é preciso definir a "velocidade de crescimento do número de bactérias"
Vamos fazê-lo agora!

Taxas II

Definindo a taxa de variação

$$\text{Taxa de variação de uma função } N(t) = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t}$$

Em palavras:
pegue a função em dois instantes próximos (por um intervalo de tempo Δt) : t e $t + \Delta t$.
Calcule a diferença e divida pelo intervalo de tempo.

Faz sentido?

- Uma função que não varia tem taxa de variação nula. OK!
- Uma função que cresce tem taxa de variação positiva. OK!
- Uma função que decresce tem taxa de variação negativa. OK!
- Uma função que cresce mais rápido que outra, tem maior taxa de variação. OK!

Mais sobre taxas de variação

- Tem um porém.
- O valor de Δt arbitrário.
- Mas para capturar melhor a noção de taxa de variação *instantânea*, gostaríamos que Δt fosse o menor possível. Bem pequeno mesmo.
- Quanto menor Δt, mais $N(t+\Delta t)$ fica próximo de $N(t)$.
- E a razão

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}$$

- ?,
  - $\frac{0}{0}$?

Taxas de variação instantâneas

- Para vermos que a expressão que escrevemos anteriomente faz sentido, podemos tentar calculá-la para um caso bem definido.
- Tomemos $N(t) = t^2$.
- Vamos calcular a taxa de variação:

$$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t}$$

- Para tal escolhemos algum valor de t. Digamos $t = 1$

Δt	$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}$
0,5	2,5
0,1	2,1
0,01	2,01
0,001	2,001
0.00...1	2,00000....

Mais taxas...

Taxas de variação instantânea

- Ótimo: descobrimos que a taxa de variação instantânea da função $N(t) = t^2$ quando $t = 1$ é 2.
- E se $t = 2$, ou ainda outros valores?
- Podemos fazer o cálculo.

t	$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}$
1	2
2	4
3	6
4	8

sempre com $\Delta t \Rightarrow 0$.

Então temos que a taxa de variação instantânea de t^2 $2t$.

Derivada

Derivada= taxa de variação instantânea

Nós acabamos de calcular a nossa primeira derivada.
Vamos chamar a taxa de variação instantânea de uma função $N(t)$,

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}$$

de derivada de $N(t)$ em relação a t. Denotamo-la por :

$$\frac{dN}{dt}$$

Derivada

Comentários

- veja que nada disto depende do fato de estarmos falando de um organismo em particular;
- podemos pensar em derivadas de qualquer função;
- a derivada de uma função é outra função;
- podemos ter funções que não dependem do tempo, e sim do espaço, ou de outra variável;
- teremos taxas de variação espacial ==> teremos derivadas de uma função em relação a x;
- assim podemos considerar a derivada de uma função em relação a qualquer *variável independente*.

Vamos agora aprender a calcular derivadas.

Cálculos

Função Constante

$$N(t) = K$$

onde K é uma constante qualquer.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{K-K}{\Delta t} = 0$$

A taxa de variação instantânea de uma função contante é zero.

Função Linear

$$N(t) = at + b$$

onde a e b são constantes quaisquer.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{a(t+\Delta t) + b - at + b}{\Delta t} = \frac{a\Delta t}{\Delta t} = a$$

A taxa de variação instantânea de uma função linear é uma constante.

Cálculos III

Função Quadrtica

$$N(t) = at^2 + bt + c$$

onde a, b e c são constantes quaisquer.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{a(t+\Delta t)^2 + b(t+\Delta t) + c - at^2 - bt - c}{\Delta t} =$$

$$\frac{at^2 + 2at\Delta t + a(\Delta t)^2 + bt + b\Delta t + c - at^2 - bt - c}{\Delta t} =$$

$$\frac{2at\Delta t + a(\Delta t)^2 + b\Delta t}{\Delta t} = 2at + b + a(\Delta t) = 2at + b$$

onde usamos que Δt tende a zero.

A taxa de variação instantânea de uma função quadrática é uma função linear.

Escola de Biomatemática da Bahia

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funçõees e Suas Variaçõees

Derivadas

Cálculos

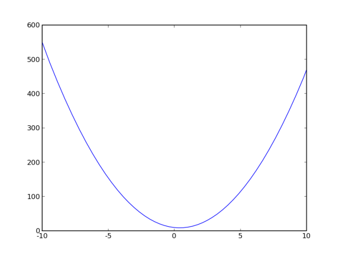
Regras do Cálculo

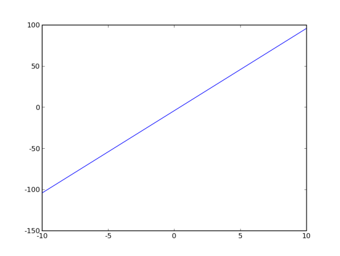
Máximos e Mínimos

Derivada Segunda

Resumo Final

Função Quadrática e sua Derivada





Cálculos IV

Polinômios

$$N(t) = at^n + bt^{n-1} + ct^{n-2} + ...yt + z$$

onde a, ... são constantes quaisquer.

$$\frac{dN}{dt} = ant^{n-1} + b(n-1)t^{n-2} + c(n-2)t^{n-3} + ...y$$

Somas

- Note que a derivada da soma é igual a soma das derivadas.
- Mas a derivada do produto **não** é o produto das derivadas.

Regras de Cálculo

Regras do Cálculo

- Muito bem, aprendemos a derivar um polinômio.
- E mais,...?
- Outras funções?
- Vamos aprender isso de uma forma instrumental..
- Vamos apresentar cinco funções básicas e suas derivadas.
- E depois vamos aprender a derivar somas, produtos e composições de funções.

Regras de Cálculo II

Cinco casos.

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = e^x$$

$$f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = 1/x$$

$$f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = -\sin(x)$$

$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = nx^{n-1}$ inclusive para n negativo (mas diferente de -1).

Regras de Cálculo III

Somas

A derivada da soma de duas funções é a soma das suas derivadas.

$$\frac{d(f(x)+g(x))}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d(\sin(x)+\ln(x))}{dx} = \cos(x) + 1/x$$

$$\frac{d(x^4+\cos(x))}{dx} = 4x^3 - \sin(x)$$

Regras de Cálculo IV

Produtos

A derivada do produto de duas funções:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} \cdot h(x) + g(x) \cdot \frac{dh}{dx}$$

Exemplos

$$f(x) = x^4 \cdot \sin(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = 4x^3 \cdot \sin(x) + x^4 \cdot \cos(x)$$

$$f(x) = x^2 \cdot \exp(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = 2x \cdot \exp(x) + x^2 \cdot \exp(x)$$

$$f(x) = \ln(x) \cdot \cos(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \cos(x) - \ln(x) \cdot \sin(x)$$

Exercícios

Calcule as derivadas das funções abaixo:

$$f(x) = 5x^2 + 4$$

$$f(x) = 1/x$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = x\sin(x)$$

$$f(x) = e^x \ln(x)$$

$$f(x) = x + \sin(x)$$

$$f(x) = \cos(x)\sin(x)$$

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$f(x) = x^2 - x^4 \cos(x)$$

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$$

$$f(x) = x^2 e^x$$

$$f(x) = x^5 \sin(x)$$

$$f(x) = e^x x^7$$

Compondo funções

Função de Função

- Para que possamos derivar funções mais interessantes, precisamos primeiro nos lembrar de como compor funções.
- Lembremos do significado de
$$f(g(x))$$
- Isto é: tome x, aplique g e obtenha $g(x)$; neste resultado aplique f e obtenha $f(g(x))$.
- Façamos alguns exercícios:

$f(x)$	$g(x)$	$f(g(x))$
$\sin(x)$	x^2	$\sin(x^2)$
x^3	$\ln(x)$	$(\ln(x))^3$
e^x	$-x^2$	e^{-x^2}
$1/x$	$\sin(x)$	$1/\sin(x)$

$f(x)$	$g(x)$	$f(g(x))$
$-x^2$	e^x	$-e^{2x}$
$\ln(x)$	e^x	x
$1/x$	e^x	e^{-x}
e^x	$1/x$	$e^{1/x}$

Compondo funções II

Derivada de uma composição de funções

- Agora, vamos ver como derivar a composição de duas funções.
- Se conheço a derivada da função $f(x)$ e da função $g(x)$, deve ser possível obter a derivada de $f(g(x))$.
- De fato.
- A regra é:

$$\frac{d(f(g(x))}{dx} = \frac{dg}{dx}\frac{df}{dg}$$

Vamos destrinchar isso.

Compondo funções II

Derivada de uma composição de funções

Vamos proceder por exemplos.

- Seja $f(x) = sin(x)$ e $g(x) = x^2$.
- Primeiramente calculemos $f(g(x)) = \sin(x^2)$
- Então a derivada da função acima é:

$$\frac{d\sin(x^2)}{dx} = 2x \cdot \cos(x^2)$$

Vamos treinar mais.

Compondo funções III

Derivada de uma composição de funções

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = ax, \quad \to f(g(x)) = e^{ax} \quad \Rightarrow \frac{d(f(g(x)))}{dx} = ae^{ax}$$

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = -x^2, \quad \to f(g(x)) = e^{-x^2} \quad \Rightarrow \frac{d(f(g(x)))}{dx} = -2x \cdot e^{-x^2}$$

$$f(x) = \sin(x), \quad g(x) = ax, \quad \to f(g(x)) = \sin(ax) \quad \Rightarrow \frac{d(f(g(x)))}{dx} = a\cos(ax)$$

$$f(x) = \ln(x), \quad g(x) = 2x+1, \quad \to f(g(x)) = \ln(2x+1) \quad \Rightarrow \frac{d(f(g(x)))}{dx} = \frac{2}{2x+1}$$

Compondo funções IV

Derivada de uma composição de funções

$$f(x) = 1/x, \quad g(x) = \cos(x), \rightarrow f(g(x)) = 1/\cos(x) \quad \Rightarrow \frac{df(g(x))}{dx} = \sin(x) \cdot \frac{1}{(\cos(x))^2}$$

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = \sin(x), \rightarrow f(g(x)) = (\sin(x))^3 \quad \Rightarrow \frac{df(g(x))}{dx} = 3\cos(x) \cdot (\sin(x))^2$$

$$f(x) = \ln(x), \quad g(x) = ax, \quad \rightarrow f(g(x)) = \ln(ax) \quad \Rightarrow \frac{df(g(x))}{dx} = 1/x$$

Compondo funções V

Muitas e muitas derivadas

- Pronto, agora você sabe derivar muitas funções.
- Somando, multiplicando e compondo as funções elementares
- Agora é uma questão de treino...
- Faça alguns exercícios.

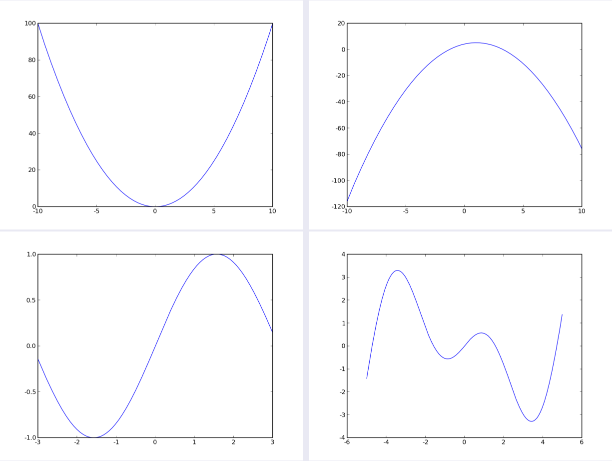
Exercícios

Derive as funções abaixo

$\dfrac{1}{x+1}$	$e^{-(x-a)^2}$
$\sin(\ln(x))$	$x \cdot \sin(3x)$
$x \cdot (\sin(x))^2$	$\ln(2x+5)$
$\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$(1+x^2)e^{-x}$
$(\ln(x))^2$	$\dfrac{x}{1+e^{2x}}$

Máximos e Mínimos

Alguns gráficos

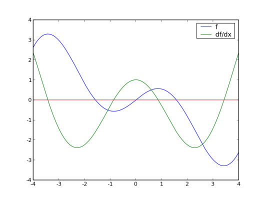


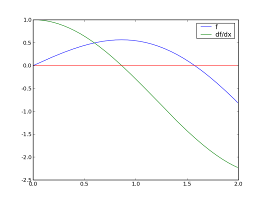
Máximos e Mínimos

- Vemos nas funções da página anterior que as funções podem ter pontos de **máximo** ou **mínimo** locais.
- Referimo-nos aos pontos que são os ápices e vales dos gráficos anteriores
- Interpretemo-los em termos de derivadas:
    - ao redor de um ápice, a função é crescente e se torna descrescente: a derivada passa de positiva para negativa;
    - ao redor de um vale, a função é decrescente e se torna crescente: a derivada passa de negativa para positiva;
- No ápice ou no vale, ou seja, num máximo ou mínimo locais a derivada é zero.
- Para melhor visualizar a situação, veja a figura seguinte, mostrando a função e a sua derivada, com zooms nos ápices e vales.

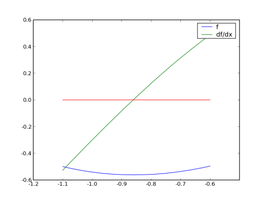
Máximos e Mínimos II

A função e sua derivada





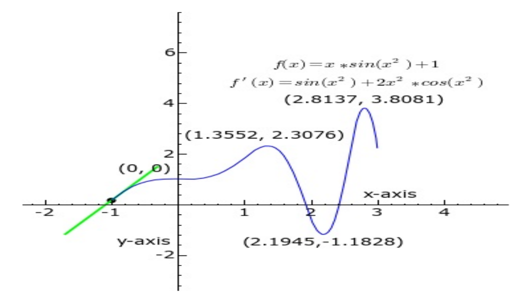
No alto à esquerda, a função e sua derivada. À direita, zoom ao redor de um máximo local. Abaixo, zoom ao redor de um mínimo local. Veja como o gráfico da derivada cruza o zero no mesmo ponto x em que se localizam máximos e mínimos locais.



Geometria

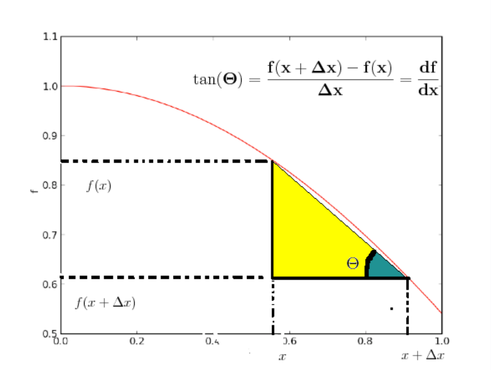
A derivada como uma tangente

Podemos dar uma interpretação geométrica para a derivada de uma função. Usaremos pouco esse conceito no curso, mas vamos dar uma olhada rápida nele.
Primeiro, lembremos o que é uma reta tangente a um ponto de um gráfico.



A derivada como uma tangente

- Olhemos para a figura abaixo:



Fica como um exercício de trigonometria mostrar que a inclinação ($\tan(\Theta)$) da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ num dado ponto x é igual a derivada da função neste ponto x.

Veja que isto é coerente com o fato dos máximos e mínimos locais terem derivada nula.

Derivada Segunda

Derivada da Derivada

- Vimos que a derivada de uma função $f(x)$ é uma outra função, df/dx.
- Em sendo outra função, podemos calcular a sua derivada também: $\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$.
- Chamamos esta novísssima função de "derivada segunda de $f(x)$". E escrevemos:
- $$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$
- Podemos evidentemente ir calculando derivadas de derivadas, e teremos derivadas terceiras, quartas, etc.

Resumo Final

O que ficou

- A derivada é uma forma de quantificar a noção de taxa de variação instantânea.
- A derivada de uma função é também uma função.
- Aprendemos algumas regras:
  - Derivamos algumas funções elementares;
  - Depois aprendemos a derivar a soma, o produto e a composição de funções.
- Podemos derivar duas vezes uma função: a taxa variação da taxa de variação.

Resumo Final

Obrigado pela atenção