Escola de Biomatemática da Bahia

Roberto André Kraenkel, *IFT*

Aula IV

UFBA, 2022

A aula de hoje

1 Epidemias
- Histórias...
- Modelos
- Glórias e Misérias

Epidemias: histórias

A Peste de Atenas.

- A peste de Atenas foi uma epidemia que grassou em 430(AC) em Atenas, durante a Guerra do Peloponeso.
- Foi relatada por Tucídides: calores, sufocamento, convulsões , necroses dos dedos, ..morte.
- 1/3 da população foi dizimada. *Pericles*, inclusive.
- Não se sabe que doença foi a causadora da epidemia. Tifo epidêmico é a mais provável. transmitida entre animais e o homem por meio de piolhos.
- A epidemia aparentemente veio se alastrando a partir da África.

Epidemias: histórias

Cito, longe, tarde.

A Peste.

- A peste é uma doença infecciosa causada pela bactéria *Yersinia pestis*. Há três formas;
  - **pneumônica**, afetando os pulmões e sendo transmissível entre humanos.
  - **bubônica**, inflamando os gânglios, transmitida por pulgas infectadas a aprtir de ratos.
  - **septisêmica**, espalhando para todos os órgãos pela corrente sangüínea.
- Não tratadas, são fatais. Antibióticos são eficientes contra a peste .
  - Devem ser ministrados em poucas horas...

Epidemias: histórias.

A chegada, o progresso e o resultado da doença, tudo era questão de meia-hora. (E.A. Poe, em A Máscara da Morte Vermelha).

A Peste.

- Houve três grandes pandemias de peste;
  - *A peste de Justiniano*, (541 D.C.), espalhando-se a partir de Constantinopla e matando 25% da população da região mediterrânea.
  - *A peste negra*, (1347), entrando pela Sicília, matou $1/3$ da população européia.
  - A *terceira* pandemia, começando na China em 1855 e matando 12 milhões de pessoas na China e Índia.
  - Paul Lous Simond; "Naquele dia, 2 de junho de 1898, senti uma emoo difcil de exprimir em face ao pensamento de que acabara de descobrir um segredo que havia torturado o Homem desde o aparecimento da peste no mundo".
- Ainda existe a peste hoje em dia, mas não de forma epidêmica. Entre 1987 e 2001 houve 2847 mortes por peste no mundo.

Epidemias: histórias

Algumas Grandes Epidemias

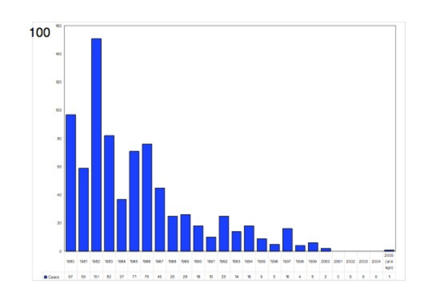


Figura: A peste no Brasil de 1980 a 2005. A maioria dos casos e dá em áreas rurais do Nordeste e de Minas Gerais. Entre 1980 e 2005, houve seis mortes.

Epidemias: histórias

Aqueles dias, ninguém que os tenha vivido poderá jamais esquecê-los. (Pedro Dantas).

A Gripe Espanhola.

- A *gripe espanhola* foi uma epidemia do virus da gripe (*influenza A*) particularmente severa e mortífera.
- Ocorreu entre 1918 e 1919.
- Atingiu praticamente todas as regiões do mundo.
- Ao redor de 50 milhões de pessoas morreram. 500 milhões (1/3 da população do mundo) foram infectadas.
- A doença se transmite de pessoa para pessoa.
- Em São Paulo, a primeira morte ocorreu em 21 de outubro de 1918. Em final de novembro, a epidemia já definhava.
- O Carnaval de 1919 ficou famoso pela euforia!
  - Fim da gripe espanhola.
  - Fim da Grande Guerra.
  - **Tudo de bom!**.

Modelos Matemáticos

Modelo Simples: hipóteses

- Para construir um modelo matemático elementar para uma epidemia vamos começar com algumas simplificações .
  - A população tem um número constante de indivíduos.
  - A população é espacialmente homogênea.
- Com isto, definimos implicitamente escalas de tempo e de espaço para o nosso modelo.
- Dividimos os indivíduos de nossa população em três categorias:
  - S susceptíveis;
  - I infectados;
  - R recuperados (imunes ou falecidos)

Modelo de Kermack & McKendrick (1927)

A taxa de variação *per capita* dos susceptíveis é proporcional ao número de infectados:

$$\frac{dS}{dt} = -rSI$$

sendo r a taxa de infecção .

Modelo de Kermack & McKendrick (1927)

A taxa de variação *per capita* dos infectados é proporcional ao número de infectados menos a taxa de remoção (recuperados imunes ou mortos).

$$\frac{dS}{dt} = -rSI$$

$$\frac{dI}{dt} = rSI - aI$$

Modelo de Kermack & McKendrick (1927)

A taxa de variação *per capita* dos recuperados é constante.

$$\frac{dS}{dt} = rSI$$

$$\frac{dI}{dt} = rSI - aI$$

$$\frac{dR}{dt} = aI$$

Modelo de Kermack & McKendrick (1927)

Temos portanto três equações para três variáveis:

$$\frac{dS}{dt} = -rSI$$

$$\frac{dI}{dt} = rSI - aI$$

$$\frac{dR}{dt} = aI$$

ANALISEMO-LAS!

Análise do modelo I

$$\frac{dS}{dt} = -rSI \quad \frac{dI}{dt} = -rSI - aI \quad \frac{dR}{dt} = aI$$

- Primeiramente notemos que, se somarmos as três equações teremos:

$$\frac{d(S+I+R)}{dt} = 0 \Rightarrow S + I + R = N$$

onde N é a população total, constante.

- Vamos ser mais precisos no problema que queremos analisar:
  - Inicialmente, em $t = 0$, temos: $\boldsymbol{S(0) = S_0}$, $\boldsymbol{I(0) = I_0}$ e ♦ $\boldsymbol{R(0) = 0}$ ♦.
  - Ou seja, temos um certo númerom de infectados ($\boldsymbol{I_0}$) e de susceptíiveis ($\boldsymbol{S_0}$).
  - Dados $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{S_0}$ e $\boldsymbol{I_0}$, queremos saber se haverá ou não uma epidemia. Ou seja, se $\boldsymbol{I(t) > I_0}$ para algum tempo $\boldsymbol{t}$.

Análise do modelo II

$$\frac{dS}{dt} = -rSI \qquad \frac{dI}{dt} = -rSI - aI \qquad \frac{dR}{dt} = aI$$

- Notemos inicialmente que em $t = 0$:

$$\left[\frac{dI}{dt}\right]_0 = -rS_0 I_0 - aI_0 = -I_0(rS_0 - a)$$

- Se $S_0 < a/r$ então $\left[\frac{dI}{dt}\right]_0 < 0$.
- Se $S_0 > a/r$ então $\left[\frac{dI}{dt}\right]_0 > 0$ (Epidemia!)
- Por outro lado, $S < S_0$ para todo t, pois $dS/dt < 0$.
- Assim, se $S_0 < a/r$ então $S(t) < a/r$ para todo t

$$\frac{dI}{dt} = -rSI - aI = I(rS - a) < 0$$

  e portanto $I(t) < I_0$ e não há epidemia.
- Se $S_0 > a/r$ haverá epidemia (pois $\left[\frac{dI}{dt}\right]_0 > 0$). Note porém que $I(t)$ não cresce indefinidamente.

Análise do modelo III

Em resumo...

- Se $S_0 > a/r$ há epidemia, e se $S_0 < a/r$, não há.
- Ou:

$$R_0 \equiv \frac{S_0 r}{a} > 1$$

 é a condição de existência de uma epidemia.
- R_0 é chamada de **Razão Reprodutiva Básica**.
- Mesmo em modelos mais completos, podemos definir um parâmetro análogo.

Análise do Modelo IV

$$\frac{dS}{dt} = -rSI \quad \frac{dI}{dt} = -rSI - aI \quad \frac{dR}{dt} = aI$$

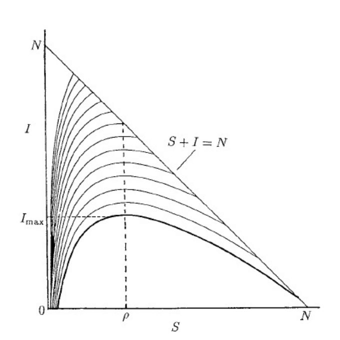
Fazendo sentido de $R_0 > 1$.

- O que nos diz a condição $R_0 \equiv \frac{S_0 r}{a} > 1$?
- Passo a passo:
  - a é a taxa de remoção de infectados para a classe de recuperados. $1/a$ pode ser visto como o tempo característico da infecção .
    - Quanto menor a, maior o tempo de infecção , e mais facilmente tem-se uma epidemia. Faz sentido.
    - O tempo médio de infecção pode ser diminuído por medidas de saúde pública.
  - Quanto maior S_0 maior R_0. Ou seja, quanto mais susceptíveis, mais chances de haver epidemia. Faz sentido também.
  - r mede a taxa de transferência de susceptíveis para infectados. Quanto maior, pior a doença. Mais facilmente haverá epidemia. Faz sentido também.

Análise do Modelo V

Nada como um gráfico...

- Podemos visualizar as soluções do modelo no espaço de fase.
- Temos três variáveis, mas como $S + I + R = N$, podemos eliminar uma delas. Por exemplo, R. Ficamos com S e I.

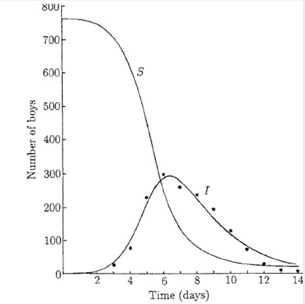


Note no diagrama ao lado que todas as trajetórias vão à $I = 0$ quando $t \to \infty$. Toda epidemia acaba! Que bom!.

Repare que $S(t \to \infty) \neq 0$. Nem todos pegam a infecção .

Glória e Miséria do Modelo

Glórias



- O modelo é simples.
- É adequado a alguns casos. Sobretudo para doenças que podem passar de pessoa-a-pessoa.
- Ao lado, uma comparação do modelo com os registros de uma epidemia de gripe num internato inglês.
- As curvas são obtidas por integração numérica.

- Ademais, o modelo pode ser visto com ponto de partida para modelos mais complexos.
- Podemos incluir novos *compartimentos*, por exemplo.
- Podemos incluir também incluir *crescimento demográfico*.

Glória e Miséra do Modelo

Misérias

Figura: *Rev. Latino-Am. Enfermagem vol.14 no.6 Ribeirão Preto Nov./Dec. 2006*

- O modelo pressupõe homogeneidade espacial.
- Ao lado, a distribuição da incidência de tuberculose em Ribeirão Preto em 2002. Nada homogênea.
- É pouco adequado para modelos de transmissão de moléstias por vetores.
- É totalmente macroscópico: não levamos em conta explicitamente probabilidades de transmissão , etc..
- Tampouco é verdade que "toda epidemia passa". Após a sua passagem, poderia se gerar uma situação endêmica. Isso não está no modelo.

Referências

- M.J. Keeling anf P. Rohani : *Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals* (Princeton, 2007).
- J.D. Murray: *Mathematical Biology I* (Springer, 2002)
- F. Brauer e C. Castillo-Chavez: *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology* (Springer, 2001).

obrigado pela atenção